УДК 539.374

В. В. Стружанов, В. В. Башуров

ДЕФОРМИРОВАНИЕ И РАЗРУШЕНИЕ ШАРА ПРИ ЗАКАЛКЕ

1. Введение

Одним из широко распространенных технологических процессов упрочнения деталей машин является закалка. Закалке подвергаются изделия, работающие в условиях повышенных нагрузок, например шарики в подшипниках. Если равномерно нагретый до высокой температуры стальной шар опустить в охлаждающую жидкость, то в результате кратковременного охлаждения температура в приповерхностных слоях уменьшается, что приводит к фазовым превращениям, а именно часть зерен аустенита переходит в мартенситное состояние. Зерна мартенсита имеют больший объем, чем зерна аустенита [1], следовательно, росту мартенситных зерен будет препятствовать окружающий материал. В результате после окончательного постепенного охлаждения шара в воздушной среде в нем возникнет самоуравновешенное поле закалочных напряжений. При этом в поверхностных слоях появляются сжимающие тангенсальные напряжения, обеспечивающие их упрочнение. Однако закалочные напряжения могут быть столь велики, что материал в некоторых областях шара (особенно в местах с растягивающими напряжениями) перейдет в пластическое состояние или даже разрушится. Чтобы избежать этих нежелательных последствий закалки, необходимо на стадии проектирования технологии проводить расчеты самоуравновешенных закалочных напряжений для определения рациональных параметров закалки (глубины закалочного слоя и объемного содержания мартенсита).

Методы расчета самоуравновешенных напряжений, вызванных фазовыми превращениями, разработаны для тел, сохраняющих упругость после закалки [2–4]. Задачи же по определению зон пластичности и разупрочнения, возникающих под действием закалочных напряжений, а также разрушения деталей в результате закалки, еще недостаточно изучены.

В данной работе на основе методов расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций под действием внешней нагрузки, в которых учитывается возможность разупрочнения и разрушения материала [5], решается задача о деформировании и разрушении шара при закалке. В качестве определяющих соотношений приняты соотношения среды Генки [6], причем единая кривая дополнена падающим участком.

2. Постановка задачи

При определении рациональных параметров закалки и возможности разрушения закалочного шара радиуса b будем считать, что объемное содержание мартенсита задано формулой

$$P = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le d, \\ P_0(r-d)/(b-d), & d \le r \le b. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $d = b - a$ (a – глубина закаленного слоя), $0 \le P_0 \le 1$ – объемное содержание мартенсита в поверхностном слое, r – радиальная координата.

После мартенситного превращения свободный от связей элемент материала приобретает деформацию

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*_r = \varepsilon^*_\varphi = \varepsilon^*_\theta = \alpha P. \tag{2.2}$$

Здесь α – параметр свободной структурной деформации мартенсита. Деформации (2.2) несовместны. Они и являются причиной появления в шаре, сохраняющем сплошность, упомянутых выше закалочных напряжений.

Для определения напряженно-деформированного состояния в шаре необходимо решить краевую задачу, которую будем называть исходной задачей, состоящую из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma''_r}{dr} + 2\frac{\sigma''_r - \sigma''_\theta}{r} = 0, \tag{2.3}$$

соотношений Коши

$$\varepsilon'_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon'_\theta = \varepsilon'_\varphi = \frac{u}{r}, \tag{2.4}$$

определяющих соотношений

$$\begin{aligned} \sigma''_r &= 2\mu\varepsilon'_r + \lambda(\varepsilon'_r + 2\varepsilon'_\theta) - (3\lambda + 2\mu)\alpha P - 2\mu\varepsilon^p_r - \lambda(\varepsilon^p_r + 2\varepsilon^p_\theta), \\ \sigma''_\theta &= \sigma''_\varphi = 2\mu\varepsilon'_\theta + \lambda(\varepsilon'_r + 2\varepsilon'_\theta) - (3\lambda + 2\mu)\alpha P - 2\mu\varepsilon^p_\theta - \lambda(\varepsilon^p_r + 2\varepsilon^p_\theta) \end{aligned} \tag{2.5}$$

и граничных условий

$$\sigma''_r(b) = 0, u(0) = 0. \tag{2.6}$$

Здесь u – радиальное перемещение точек шара, $\lambda = \nu E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$, $\mu = E/[2(1+\nu)]$ – коэффициенты Ляме, E – модуль Юнга, ν – коэффициент

Пуассона, σ''_r, σ''_θ, σ''_φ – соответственно радиальные и окружные самоуравновешенные напряжения, ε'_r, ε'_θ, ε'_φ – радиальные и окружные совместные деформации, ε^p_r, ε^p_θ, ε^p_φ – радиальные и окружные пластические деформации. В силу центральной симметрии тела и объемного содержания мартенсита окружные напряжения и деформации равны.

3. Основная краевая задача

При заданных значениях пластических деформаций и объемного содержания мартенсита решение исходной краевой задачи представляется суммой решений двух краевых задач, а именно основной задачи (в соотношениях (2.5) полагаем ε^p, $\varepsilon^p_\theta = 0$) и корректирующей задачи (в соотношениях (2.5) полагаем $P = 0$).

Решение основной задачи находится аналогично решению задачи по определению температурных напряжений в шаре при центрально-симметричном распределении температуры [7]. Для распределения (2.1) оно равно

$$
\begin{aligned}
&\sigma^t_r = \sigma^t_\theta = \alpha P_0 EB/[6(1-\nu)], \quad 0 \le r \le d;\\
&\sigma^t_r = \alpha P_0 E[B - (r-d)(b-d)^{-1}B_r]/[6(1-\nu)];\\
&\sigma^t_\theta = \alpha P_0 E[B + 0,5(r-d)(b-d)^{-1}(B_r - 12)]/[6(1-\nu)], \quad d \le r \le b;\\
&\varepsilon'_r = \varepsilon'_\theta = \alpha P_0 B(1-2\nu)/[6(1-\nu)], \quad 0 \le r \le d;\\
&\varepsilon'_r = \alpha P_0[(1-2\nu)B + (1+\nu)(r-d)(b-d)^{-1}(6 - B_r)]/[6(1-\nu)];\\
&\varepsilon'_\theta = \alpha P_0[(1-2\nu)B + 0,5(1+\nu)(r-d)(b-d)^{-1}B_r]/[6(1-\nu)], \quad d \le r \le b.
\end{aligned}
$$

Здесь $B = 3 - d/b - d^2/b^2 - d^3/b^3$, $B_r = 3 - d/r - d^2/r^2 - d^3/r^3$.

Кроме совместных деформаций, видимых внешним по отношению к шару наблюдателем, имеют место и деформации, отсчитываемые от размеров свободного от связей элементарного объема материала после мартенситного превращения и фиксируемые внутренним наблюдателем, помещенным в данный объем. Эти деформации связаны с закалочными напряжениями законом Гука и определяют реальные деформации материала.

В нашем случае они равны

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^t_r = \varepsilon^t_\theta = \alpha P_0(1-2\nu)B/[6(1-\nu)], \quad 0 \le r \le d;\\
&\varepsilon^t_r = \alpha P_0\{(1-2\nu)B - (r-d)(b-d)^{-1}[(1+\nu)B_r - 12\nu]\}/[6(1-\nu)];\\
&\varepsilon^t_\theta = \alpha P_0\{(1-2\nu)B + (r-d)(b-d)^{-1}[0.5(1+\nu)B_r - 6(1-\nu)]\}/[6(1-\nu)],\\
&\qquad\qquad d \le r \le b.
\end{aligned}
$$

Максимальный сдвиг равен

$$\gamma^t = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le d, \\ \alpha P_0 (r-a)(1+\nu)(6-1,5B_r)/[6(b-a)(1-\nu)], & d \le r \le b, \end{cases}$$

а максимальное касательное напряжение

$$\tau^t = \begin{cases} 0, & 0 \le r \le d, \\ \alpha P_0 E (r-a)(6-1,5B_r)/[12(b-a)(1-\nu)], & d \le r \le b. \end{cases}$$

Очевидно, что $\tau^t = G\gamma^t$. И наконец, объемные напряжение и деформация определяются выражениями

$$\sigma_0^t = \begin{cases} \alpha P_0 E B/[6(1-\nu)], & 0 \le r \le d, \\ \alpha P_0 E [B - 4(r-d)(b-a)^{-1}]/[6(1-\nu)], & d \le r \le b; \end{cases}$$

$$\varepsilon_0^t = \begin{cases} \alpha P_0 (1-2\nu) B/[6(1-\nu)], & 0 \le r \le d, \\ \alpha P_0 1-2\nu)[B - 4(r-d)(b-a)^{-1}]/[6(1-\nu)], & d \le r \le b. \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma_0^t = K\varepsilon_0^t$. Здесь G – модуль сдвига, K – объемный модуль.

4. Корректирующая краевая задача

Корректирующую задачу решаем посредством перехода от системы (2.3)–(2.5) к уравнению Ляме в случае центральной симметрии [7], при этом используем выражения для максимального пластического сдвига $\gamma^p = \varepsilon_r^p - \varepsilon_\theta^p$ и объемной пластической деформации $\varepsilon_0^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_r^p + 2\varepsilon_\theta^p)$. После определения общего решения для радиального перемещения произвольные константы находим с использованием граничных условий (2.6). Затем по формулам (2.4) вычисляем деформации и по определяющим соотношениям (2.5), где $P = 0$, – напряжения. В результате имеем

$$q_r'' = \frac{2E}{3(1-\nu)}\left(\int_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int_0^b \frac{\gamma^p}{r}\,dr\right) + \frac{2E}{1-\nu}\left(\frac{1}{b^3}\int_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr - \frac{1}{r^3}\int_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr\right);$$

$$q_\theta'' = \frac{2E}{3(1-\nu)}\left(\int_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int_0^b \frac{\gamma^p}{r}\,dr\right) + \frac{E\gamma^p}{3(1-\nu)} + \\ + \frac{E}{1-\nu}\left(\frac{2}{b^3}\int_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr - \frac{1}{r^3}\int_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr - \varepsilon_0^p\right);$$

$$e'_r = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\left(\int\limits_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int\limits_0^b \frac{\gamma^p}{r}\,dr\right) + \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\gamma^p +$$

$$+ \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\left[\frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{1}{b^3}\int\limits_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr - \frac{1}{r^3}\int\limits_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0^p\right];$$

$$e'_\theta = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\left(\int_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int_0^b \frac{\gamma^p}{r}\,dr\right) +$$

$$+ \frac{2(1+\nu)}{1-\nu}\left[\frac{1-2\nu}{1+\nu}\frac{1}{b^3}\int_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr - \frac{1}{2r^3}\int_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr\right];$$

$$\xi'' = \frac{1}{2}(q''_r - q''_\theta) = -\frac{E\gamma^p}{6(1-\nu)} - \frac{E}{1-\nu}\left(\frac{3}{2r^3}\int_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr - \frac{1}{2}\varepsilon_0^p\right);$$

$$\eta'' = e''_r - e''_\theta = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\gamma^p - \frac{1+\nu}{1-\nu}\left(\frac{3}{r^3}\int_0^r \varepsilon_0^p r^2 dr - \varepsilon_0^p\right);$$

$$q''_0 = \frac{1}{3}(q''_r + 2q''_\theta) = \frac{2E}{3(1-\nu)}\left(\int_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int_0^b \frac{\gamma^p}{r}\,dr\right) +$$

$$+ \frac{2E\gamma^p}{9(1-\nu)} + \frac{2E}{3(1-\nu)}\left(\frac{3}{b^3}\int_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr - \varepsilon_0^p\right);$$

$$e'_0 = \frac{1}{3}(e'_r + 2e'_\theta) = \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)}\left(\int_0^r \frac{\gamma^p}{r}\,dr - \int_0^b \frac{\gamma^p}{r}dr\right) + \frac{2(1-2\nu)}{9(1-\nu)}\gamma^p +$$

$$+ \frac{(1+\nu)}{1-\nu}\left[\frac{2(1-2\nu)}{1+\nu}\frac{1}{b^3}\int_0^b \varepsilon_0^p r^2 dr + \frac{1}{3}\varepsilon_0^p\right]. \tag{4.1}$$

Здесь q''_r, q''_θ – самоуравновешенные напряжения, отвечающие неупругим деформациям, ξ'' – максимальное касательное напряжение, q''_0 – объемное напряжение, e'_r, e'_θ – совместные деформации, η' – максимальный сдвиг, e'_0 – объемная деформация.

5. Итерационная процедура решения исходной краевой задачи

Так как пластические деформации, могущие возникнуть в результате закалки, изначально неизвестны, то при решении исходной краевой задачи необходимо применить итерационную процедуру, в которой на каждом шаге вносится поправка на величину пластических деформаций.

Сначала находим решение основной краевой задачи для заданного объемного содержания мартенсита в поверхностном слое шара и заданной глубины закалки, а именно ε_0^t и γ^t. Затем, используя соотношения, позволяющие определять величину пластической деформации по величине полной деформации (этот закон будет сформулирован ниже), находим отвечающие деформациям ε_0^t, γ^t величины пластических деформаций ε^p, γ^p. Подставляя их значения в формулы (4.1), находим решение корректирующей задачи. Первым приближением к решению исходной краевой задачи будет сумма решений основной задачи и данной корректирующей [5]. Используя первое приближение, вычисляем деформации собственно материала:

$$\varepsilon_{01} = \varepsilon_0^t + e_0', \gamma_1 = \gamma^t + \eta'.$$

Далее в каждой точке тела находим приращения пластических деформаций $d\varepsilon_{01}^p$, $d\gamma_1^p$ по приращениям полных деформаций $d\varepsilon_0 = e_0'$, $d\gamma = \eta'$ и проводим корректировку первого приближения, а именно по формулам (4.1), где полагаем $\gamma^p = d\gamma_1^p$, $\varepsilon^p = d\varepsilon_{01}^p$, находим решение корректирующей задачи и складываем его с первым приближением. Таким образом, второе приближение равно [5]

$$\varepsilon_{02} = \varepsilon_{01} + e_{01}', \gamma_2 = \gamma_1 + \eta_1'$$

(e_{01}', η_1' – второе корректирующее решение).

Процесс корректировки продолжаем до тех пор, пока приращения неупругих деформаций не станут меньше наперед заданной малой величины. В итоге решением исходной краевой задачи является сумма решений основной и корректирующей задач, причем последнее получаем по формулам (4.1), где объемная неупругая деформация равна $\varepsilon_0^p + \sum_{i-1}^n d\varepsilon_{0i}^p$, а сдвиговая неупругая деформация – $\gamma^p + \sum_{i-1}^n d\gamma_i^p$ (n – число итераций).

6. Модель материала

Рассмотрим среду, для которой приращение (дифференциал) функции удельной свободной энергии в изотермическом процессе отождествляется с элементарной работой деформаций, т. е. $dF = dA = \sigma \cdot\cdot\, d\varepsilon$. Здесь σ, ε – соответственно симметричные тензоры второго ранга напряжений и деформаций, двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензоров [6]. Представим каждый из этих тензоров суммой шаровых тензоров и тензоров-девиаторов. Так как двойное скалярное произведение любого шарового тензора на тензор-девиатор равно нулю, то $\sigma \cdot\cdot\, d\varepsilon = 3\sigma_0 d\varepsilon_0 + \sigma_d \cdot\cdot\, d\varepsilon_d$. Здесь $\sigma_0 = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$, $\varepsilon_0 = (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi)/3$ – компоненты шаровых тензоров (объемные напряжение и деформация) (по греческим индексам производится суммирование), σ_d, ε_d – тензоры-девиаторы. Полагая пропорциональность шаровых тензоров и тензоров-девиаторов напряжений и деформаций с коэффициентами пропорциональности соответственно K^s и $2G^s$, находим

$$dF = 3K^s\varepsilon_0 d\varepsilon_0 + G^s\Gamma d\Gamma,$$

где величина Γ – интенсивность деформации. Так как в данной задаче сдвиги отсутствуют, то [6]

$$\Gamma^2 = 4(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\varphi^2 - \varepsilon_r\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi\varepsilon_\theta)/3.$$

До разрушения материал последовательно проходит через состояния упругости, упрочнения и разупрочнения. Стадия упрочнения характеризуется появлением неупругих деформаций и продолжающимся возрастанием сопротивления материала, однако степень этого возрастания уже меньше, чем в упругости. На стадии разупрочнения происходит интенсивный рост неупругих деформаций и падение сопротивления нагружению, которое заканчивается разрушением материала при нулевом сопротивлении. Процесс деформирования можно связать с движением изображающей точки M по некоторой плоской кривой L, заданной уравнением $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Gamma)(\Gamma = \Gamma(\varepsilon_0))$. При этом коэффициенты K^s, G^s могут изменяться сколь угодно сложным образом. Тогда свободная энергия равна

$$F = \int_L 3K^s(\varepsilon_0, \Gamma)\varepsilon_0 d\varepsilon_0 + G^s(\Gamma, \varepsilon_0)\Gamma d\Gamma.$$

Или, переходя к определенному интегралу, имеем

$$F = 3\int_0^{\varepsilon_0} K^s(\varepsilon_0, \Gamma(\varepsilon_0))\varepsilon_0\, d\varepsilon_0 + \int_0^{\Gamma} G^s(\Gamma, \varepsilon_0(\Gamma))\Gamma d\Gamma.$$

Функция свободной энергии $F = F(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_\varphi)$ является потенциалом для напряжений. Тогда определяющие соотношения для рассмотренной среды имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r} = K^s\varepsilon_0 + \frac{2}{3}G^s(2\varepsilon_r - \varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi),\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta} = K^s\varepsilon_0 + \frac{2}{3}G^s(2\varepsilon_\theta - \varepsilon_r - \varepsilon_\varphi),\\
\sigma_\varphi &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\varphi} = K^s\varepsilon_0 + \frac{2}{3}G^s(2\varepsilon_\varphi - \varepsilon_\theta - \varepsilon_r)
\end{aligned} \qquad (6.1)$$

или

$$\sigma_r - \sigma_0 = 2G^s(\varepsilon_r - \varepsilon_0), \sigma_\theta - \sigma_0 = 2G^s(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0), \sigma_\varphi - \sigma_0 = 2G^s(\varepsilon_\varphi - \varepsilon_0).$$

Если имеет место линейно упругая среда ($K^s = K = 3\lambda + 2\mu$, $G^s = G = \mu$), то соотношения (6.1) определяют классический закон Гука. Если постоянным является только модуль $K^s = K$, а G^s зависит только от Γ, то выражения (6.1) являются определяющими соотношениями среды Генки [6].

Механические свойства среды определяет симметричный тензор второго ранга D, компонентами которого являются инкрементальные (мгновенные) модули $D_{rr} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial\varepsilon_r}$, $D_{\theta\theta} = \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\varepsilon_\theta}$, $D_{\varphi\varphi} = \frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varepsilon_\varphi}$, $D_{r\theta} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial\varepsilon_\theta}$, $D_{r\varphi} = \frac{\partial\sigma_r}{\partial\varepsilon_\varphi}$, $D_{\theta\varphi} = \frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\varepsilon_\varphi}$. Производя преобразования полученных после дифференцирования выражений с учетом того, что $K^p = d\sigma_0/d\varepsilon_0 = d(K^s\varepsilon_0)/d\varepsilon_0 = \varepsilon_0 dK^s/d\varepsilon_0 + K^s$, $G^p = dT/d\Gamma = d(G^s\Gamma)/d\Gamma = \Gamma dG^s/\Gamma + G^s$, и полагая затем $\varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta$, получаем

$$\begin{aligned} D_{rr} &= \frac{1}{3}(K^p + 4G^p), D_{r\theta} = D_{r\varphi} = \frac{1}{3}(K^p - 2G^p), \\ D_{\theta\theta} &= D_{\varphi\varphi} = \frac{1}{3}(K^p + G^p), D_{\theta\varphi} = \frac{1}{3}(K^p + G^p) - G^s. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь K^p, G^p – инкрементальные объемный модуль и модуль сдвига, T – интенсивность касательных напряжений.

Теперь можно записать определяющие соотношения в дифференциалах (приращениях)

$$d\sigma = D \cdot d\varepsilon, \tag{6.3}$$

где $d\sigma$, $d\varepsilon$ – дифференциалы векторов (тензоров первого ранга) σ и ε с компонентами σ_r, σ_θ, σ_φ, ε_r, ε_θ, ε_φ, точкой обозначено скалярное произведение тензоров.

Предположим, что пластические (неупругие) деформации не влияют на упругие свойства материала. Кроме того, пренебрегаем диссипацией континуального разрушения. Следовательно, возможная разгрузка происходит по линейному закону в соответствии с законом Гука. Тогда деформация аддитивна, т. е. $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$, где $d\varepsilon$, $d\varepsilon^p$, $d\varepsilon^e$ – соответственно приращения полной, упругой и пластической деформаций. При этом напряжения будут связаны с упругими деформациями законом Гука, а именно

$$d\sigma = C \cdot d\varepsilon^e = C \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p). \tag{6.4}$$

Здесь C – тензор модулей упругости, компоненты которого определяются выражениями (6.2) при $K^p = K^s = K$, $G^p = G^s = G$. Подставляя теперь в формулу (6.4) выражение для $d\sigma$ из равенства (6.3), находим, что [5]

$$d\varepsilon^p = (I - S \cdot D) \cdot d\varepsilon, \tag{6.5}$$

где I – единичный тензор второго ранга; $S = C^{-1}$ – симметричный тензор второго ранга модулей упругой податливости, ненулевые компоненты которого равны

$$S_{rr} = 1/E, S_{r\theta} = S_{r\varphi} = S_{\theta\varphi} = -\nu/E.$$

Закон (6.5) называется инкрементальным законом пластичности, так как определяющую роль в нем играют инкрементальные модули. Подставляя теперь необходимые значения в закон (6.5), после преобразований получаем для нашей задачи

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r^p &= d\varepsilon_r - \frac{K^p}{3K}(d\varepsilon_r + 2d\varepsilon_\theta) - \frac{2G^p}{3G}(d\varepsilon_r - d\varepsilon_\theta) = \\ &= \left(1 - \frac{K^p}{K}\right) d\varepsilon_0 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{G^p}{G}\right) d\gamma = d\varepsilon_0^p + \frac{2}{3} d\gamma^p; \\ d\varepsilon_\theta^p &= d\varepsilon_\varphi^p = d\varepsilon_\theta - \frac{K^p}{3K}(d\varepsilon_r + 2d\varepsilon_\theta) + \frac{G^p}{3G}(d\varepsilon_r - d\varepsilon_\theta) = \\ &= \left(1 - \frac{K^p}{K}\right) d\varepsilon_0 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{G^p}{G}\right) d\gamma = d\varepsilon_0^p - \frac{1}{3} d\gamma^p. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Выражения (6.6) используются в итерационном процессе для определения приращений пластических деформаций. Для определения приращений пластических деформаций после решения основной задачи воспользуемся следующими соображениями. В силу релаксационных процессов, связанных с диссипацией энергии пластическими деформациями, напряжения $d\sigma_0^t$, τ^t падают до значений $K^s\varepsilon_0^t$, $G^s\gamma^t$, т. е. на величины $\sigma_0^p = \sigma_0^t - K^s\varepsilon_0^t$, $\tau^p = \tau^t - G^s\gamma^t$. Отсюда пластическая деформация равна

$$\varepsilon_0^p = \frac{\sigma_0^p}{K} = \left(1 - \frac{K^s}{K}\right)\varepsilon_0^t, \gamma^p = \frac{\tau^p}{G} = \left(1 - \frac{G^s}{G}\right)\gamma^t.$$

Наконец заметим, что при разгрузке или сжатии элемента материала остаточные деформации не возникают.

7. Числовой пример

Материал стального шара радиуса $b = 100$ мм в упругом состоянии имеет характеристики: $E = 2 \cdot 10^4$ кг/мм^2, $G = 7.7 \cdot 10^3$ кг/мм^2, $K = 5 \cdot 10^4$ кг/мм^2, $\nu = 0.3$, $\alpha = 0.01$. На стадии упрочнения свойства материала определяются моделью Генки [6], а именно объемная деформация упруга ($K_h^p = K$), существует единая кривая интенсивность касательных напряжений – интенсивность деформации сдвига, не зависящая от вида напряженного состояния. Инкрементальный модуль (касательная к единой кривой) в предположении линейности упрочнения равен $C_h^p = 1.7 \cdot 10^3$ кг/мм^2, разупрочнение также полагается линейным с инкрементальными модулями $G_s^p = -3 \cdot 10^3$ кг/мм^2, $K_s^p = -10^4$ кг/мм^2. Материал переходит в состояние пластичности тогда, когда максимальный сдвиг превышает величину $\gamma_T = 2.6 \cdot 10^{-3}$. Если же

$\gamma > \gamma_B = 14.2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_0 > \varepsilon_0^B = 10^{-3}$, то материал находится в состоянии разупрочнения.

Пусть закалка осуществлена на глубину $a = 10$ мм. Тогда положительный эффект достигается при $P_0 = 0.163$. Материал шара находится в упругом состоянии, на поверхности появляются благоприятные сжимающие напряжения $\sigma_\theta = \sigma_\varphi = -40$ кг/мм^2. Если $P_0 = 1$, то в приповерхностных слоях возникают пластические деформации. Применяя для расчета напряженного состояния итерационную процедуру, описанную выше, находим, что на поверхности шара материал достигает состояния предразрушения (глубина зоны разупрочнения 4 мм), область упрочнения от $r = 92$ мм до $r = 96$ мм. Следовательно, данные параметры закалки приводят к значительному ухудшению эксплуатационных свойств шара. Если еще уменьшить глубину закалки при $P_0 = 1$, то возможно разрушение поверхностных слоев. Отметим, что при небольших глубинах закалки определяющую роль в неупругом деформировании и разрушении играют максимальные деформации сдвига.

Рассмотрим еще случай, когда глубина закалки велика ($a = 90$ мм), а $P_0 = 0.5$. Тогда неупругие деформации появляются только в центре шара. В результате применения итерационной процедуры находим, что в уравновешенном напряженно-деформированном состоянии область упругости располагается на глубине от $r = 29$ мм до $r = 100$ мм. При $0 \leq r \leq 10$ мм объемная деформация равна $\varepsilon_0 = 2.5 \cdot 10^{-3}$, затем ее величина практически линейно уменьшается до значения ε_0^B в точке $r = 29$ мм. В результате действия такой объемной деформации, превышающей ε_0^B, в центре шара появляется область разупрочнения, которая представляет собой скрытый, трудноконтролируемый дефект.

Литература

1. Богачев И. Н., Вайнштейн А. А., Волков С. Д. Введение в статистическое металловедение. М.: Металлургия, 1972.

2. Стружанов В. В. Методы определения полей собственных напряжений. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.

3. Абрамов В. В. Остаточные напряжения и деформации. М.: Машгиз, 1963.

4. Биргер И. А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963.

5. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1995.

6. Лурье А. Н. Теория упругости. М.: Наука, 1970.

7. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975.